

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = |x^2 - 4|$$

1) ¿Es aplicación?

a) Existencia: $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists f(x) \in \mathbb{R}$

P.e. ya que $|x^2 - 4| \in \mathbb{R}_0^+ \subseteq \mathbb{R}$

b) Unicidad: P.e. $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

↓

$$x_1^2 = x_2^2;$$

$$x_1^2 - 4 = x_2^2 - 4;$$

$$|x_1^2 - 4| = |x_2^2 - 4|$$

$$\text{Así que } f(x_1) = f(x_2)$$

2) ¿Es sobreyectiva?

$$\forall b \in \mathbb{R}, \exists a \in \mathbb{R} \text{ t.q. } f(a) = b$$

No, ya que $y \in \mathbb{R}_0^+$, pero, por ejemplo $y = -1$ no lo toma nunca, es decir, $\nexists x \in \mathbb{R} \text{ t.q. } f(x) = -1$.

Para que esto se cumpla, reducimos el codominio a $[0, +\infty)$

3) ¿Es inyectiva?

$$\text{Si } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Contrarejemplo:

$$f(-2) = f(2) = 0 \wedge -2 \neq 2.$$

Como la función es una parábola con mínimo en $x=0$, $y=4$, y los puntos de corte con el eje x , en $x=-2$ y $x=2$, reducimos el dominio a $x \geq 2$.

4) ¿Es biyectiva? Si, ya se cumple inyectiva y sobreyectiva.

$f: ([2, +\infty), [0, +\infty), f(x))$ es una aplicación biyectiva.

5) ¿Tiene inversa?

Si, ya se es biyectiva.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x \leq -2 \\ -x^2 + 4 & -2 < x < 2 \\ \boxed{x^2 - 4} & x \geq 2 \end{cases}$$

¡Trabaja sobre este trazo!

Intercambio y por x:

$$\begin{aligned} f(x)^{-1}: [0, +\infty) &\longrightarrow [2, +\infty) \\ y &\longrightarrow x = y^2 - 4 \end{aligned}$$

Despejo y:

$$x = y^2 - 4;$$

$$x + 4 = y^2;$$

$$\sqrt{x + 4} = y$$

Despejada
por el codominio

$$\boxed{\text{Por tanto, } f(x)^{-1} = \sqrt{x + 4}}$$